Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Sede di Latina

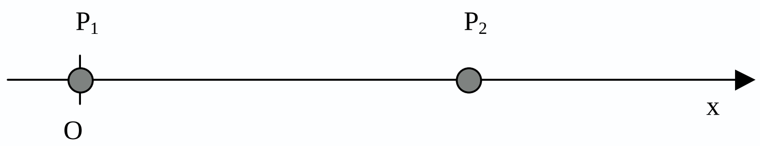
Corso di Laurea di Primo Livello in Ingegneria Elettronica, Telecomunicazioni ed Informatica
Corso di Fisica 1 – 1° Modulo
Canale M-Z
Prof. F. Michelotti

Esercitazione settimanale numero 1 – Cinematica del punto materiale

Esercizio 1 Un'autovettura procede alla velocità di 90km/h ad una distanza L dall'autovettura che la precede, che procede alla stessa velocità. L'autovettura è dotata di un sistema frenante in grado di esercitare una decelerazione massima in modulo pari a 2 m/s^2 mentre quella che precede ha un sistema analogo in grado però di esercitare una decelerazione massima doppia. Calcolare la distanza minima L che è necessario mantenere per evitare che l'autovettura che segue urti quella che precede se questa ad un certo istante inizia a frenare con il massimo della decelerazione possibile. Si effettui il calcolo inizialmente senza tenere in conto del tempo di reazione dell'autista dell'autovettura che segue e poi considerando un tempo di reazione di 1 s. Si consideri moto rettilineo in assenza di attriti o resistenze passive.

Soluzione

Scegliamo innanzitutto un sistema di riferimento rispetto al quale riferire il moto delle due autovetture. Il moto è rettilineo quindi sarà sufficiente scegliere un sistema Ox, come indicato in figura.



Scegliamo l'origine del sistema di riferimento nel punto in cui si trova il punto P_1, autovettura che segue, all'istante t=0. Schematizziamo le due autovetture come due punti materiali P_1 e P_2 e studiamo il loro moto mediante le loro coordinate $x_1(t)$ ed $x_2(t)$.

Per calcolare la distanza minima di sicurezza a cui P_1 si deve tenere da P_2 per non urtarlo occorre mettersi nelle condizioni peggiori, ovvero quelle in cui P_2 inizi a decelerare a partire da t=0 con la massima decelerazione che il suo sistema frenante è in grado di esercitare. Il calcolo della distanza minima L è differente a seconda che si tenga in conto del tempo di reazione dell'autista della vettura che segue (P_1). Intendiamo qui per tempo di reazione l'intervallo di tempo che trascorre dall'istante in cui P_2 inizia a decelerare, segnalato dall'accensione delle luci di stop, all'istante in cui l'autista di P_1 inizia a decelerare. E' chiaro che nell'effettuare il calcolo considereremo che il punto P_1 freni con la massima decelerazione possibile. Effettuiamo quindi il calcolo separatamente per i due casi.

CASO A – Tempo di reazione nullo

Il moto di entrambi i punti è uniformemente accelerato e la posizione dei entrambi i punti è descritta rispettivamente dalle relazioni:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10} + v_{10} \cdot t + \frac{1}{2} a_1 \cdot t^2 \\ x_2(t) = x_{20} + v_{20} \cdot t + \frac{1}{2} a_2 \cdot t^2 \end{cases}$$

Le velocità dei punti materiali saranno invece descritte dalle relazioni:

$$\begin{cases} v_1(t) = v_{10} + a_1 \cdot t \\ v_2(t) = v_{20} + a_2 \cdot t \end{cases}$$

Per la scelta che abbiamo fatto del sistema Ox, le condizioni iniziali assegnate dal testo del problema fissano all'istante t=0 posizione e velocità di entrambi i punti materiali. Si ha:

$$\begin{cases} x_{10} = x_1(0) = 0 \\ x_{20} = x_2(0) = L \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{10} = v_1(0) = v_0 \\ v_{20} = v_2(0) = v_0 \end{cases}$$

dove v_0=90km/h=25m/s ed L è la grandezza da determinare. Inoltre sappiamo che le accelerazioni cui sono sottoposti i due punti sono date da:

$$\begin{cases} a_1 = -a \\ a_2 = -2a \end{cases}$$

con a=2 m/s^2. Introducendo queste informazioni nelle leggi orarie abbiamo che:

$$\begin{cases} x_1(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2 \\ x_2(t) = L + v_0 \cdot t - a \cdot t^2 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} v_1(t) = v_0 - a \cdot t \\ v_2(t) = v_0 - 2a \cdot t \end{cases}$$

Possiamo calcolare la distanza L minima possibile imponendo che la posizione del punto P_2 al termine della propria frenata coincida con quella di P_1 al termine della propria frenata.

Il tempo t_2 che impiega P_2 a fermarsi è quello necessario a che v_2 diventi nulla, quindi si può ricavare imponendo:

$$v_2(t_2) = v_0 - 2a \cdot t_2 = 0$$

da cui:

$$t_2 = \frac{v_0}{2a}$$

La posizione di P_2 al termine della frenata sarà data da:

$$x_2(t_2) = L + v_0 \cdot t_2 - a \cdot t_2^2 = L + \frac{v_0^2}{2a} - a\frac{v_0^2}{4a^2} = L + \frac{1}{4}\frac{v_0^2}{a}$$

Il tempo t_1 che impiega P_1 a fermarsi è quello necessario a che v_1 diventi nulla, quindi si può ricavare imponendo:

$$v_1(t_1) = v_0 - a \cdot t_1 = 0$$

da cui:

$$t_1 = \frac{v_0}{a}$$

La posizione di P_1 al termine della frenata sarà data da:

$$x_1(t_1) = v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} a \cdot t_1^2 = \frac{v_0^2}{a} - \frac{1}{2} a \frac{v_0^2}{a^2} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a}$$

Per calcolare la condizione di minimo imponiamo quindi che:

$$x_1(t_1) = x_2(t_2)$$

da cui si ottiene:

$$\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a} = L_{MIN} + \frac{1}{4} \frac{v_0^2}{a}$$

che risolta restituisce la condizione per L_{MIN}:

$$L_{MIN} = \frac{1}{4} \frac{v_0^2}{a} = \frac{1}{4} \frac{(25m/s)^2}{2m/s^2} = 19.5m$$

CASO B – Tempo di reazione non nullo

Nel caso in cui l'autista dell'automobile che segue impieghi un tempo t_R per accorgersi che l'auto che precede sta frenando e per iniziare a frenare, occorre modificare il calcolo.

A partire dall'istante t=0 il moto del punto P_2 è esattamente lo stesso del caso precedente, descritto dalle relazioni:

$$\begin{cases} v_2(t) = v_0 - 2a \cdot t \\ x_2(t) = L + v_0 \cdot t - a \cdot t^2 \end{cases}$$

ed il punto P_2 impiegherà esattamente lo stesso tempo a fermarsi:

$$t_2 = \frac{v_0}{2a}$$

e la posizione finale sarà data da:

$$x_2(t_2) = L + v_0 \cdot t_2 - a \cdot t_2^2 = L + \frac{v_0^2}{2a} - a \frac{v_0^2}{4a^2} = L + \frac{1}{4} \frac{v_0^2}{a}$$

Il moto del punto P_1 sarà invece differente dal caso precedente. Esso procederà di moto rettilineo uniforme fino al tempo t_R e poi di moto uniformemente decelerato. Nella prima fase del moto la posizione e la velocità del punto P_1 saranno date dalle relazioni:

$$\begin{cases} v_1(t) = v_0 \\ x_1(t) = v_0 \cdot t \end{cases}$$

ed al tempo $t=t_R$ il punto P_1 avrà velocità e posizione date da:

$$\begin{cases} v_1(t_R) = v_0 \\ x_1(t_R) = v_0 \cdot t_R \end{cases}$$

Nella seconda fase del moto P_1, a partire dall'istante t_R, si muove di moto uniformemente accelerato, secondo le leggi:

$$\begin{cases} v_1(t) = v_1(t_R) - a \cdot (t - t_R) = v_0 - a \cdot (t - t_R) \\ x_1(t) = x(t_R) + v_1(t_R) \cdot (t - t_R) - \frac{1}{2} a \cdot (t - t_R)^2 = v_0 \cdot t_R + v_0 \cdot (t - t_R) - \frac{1}{2} a \cdot (t - t_R)^2 \end{cases}$$

dove a $v_1(t_R)$ e $x_1(t_R)$, rispettivamente velocità e posizione all'istante t_R in cui il punto P_1 inizia a frenare, sostituiamo i valori calcolati in precedenza. Si noti che nelle relazioni precedenti, scritte tenendo conto che la frenata inizia a $t=t_R$, è contenuta l'informazione relativa sia alla prima fase che alla seconda del moto di P_1. Il tempo che P1 impiega a fermarsi si ottiene imponendo che la sua velocità si annulli:

$$v_1(t_1) = v_0 - a \cdot (t_1 - t_R) = 0$$

da cui ricaviamo:

$$t_1 = t_R + \frac{v_0}{a}$$

La posizione al termine della frenata di P_1 sarà:

$$x_1(t_1) = v_0 \cdot t_R + v_0 \cdot (t_1 - t_R) - \frac{1}{2} a \cdot (t_1 - t_R)^2 = v_0 \cdot t_R + \frac{v_0^2}{a} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a} = v_0 \cdot t_R + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a}$$

A questo punto è sufficiente imporre la stessa condizione del caso A, ovvero che al termine della frenata P_1 al massimo possa trovarsi nella stessa posizione di P_2:

$$x_1(t_1) = x_2(t_2)$$

che, sostituendo le espressioni per $x_1(t_1)$ ed $x_2(t_2)$, dà:

$$v_0 \cdot t_R + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a} = L_{MIN} + \frac{1}{4}\frac{v_0^2}{a}$$

Semplificando i termini e risolvendo l'equazione si ottiene il valore di L_{MIN}:

$$L_{MIN} = v_0 \cdot t_R + \frac{1}{4}\frac{v_0^2}{a} = 25m/s \cdot 1s + \frac{1}{4}\frac{(25m/s)^2}{2m/s^2} = 44.5m$$

ovviamente superiore a quella del caso precedente.

Esercizio 2 Un paracadutista che sta scendendo a terra a paracadute aperto con velocità costante v_0=2m/s perde il proprio orologio quando si trova ad un'altezza di 300m da terra. Calcolare l'intervallo di tempo che intercorre tra l'arrivo a terra dell'orologio e del paracadutista.

Soluzione

Scegliamo un sistema di riferimento Ox verticale con asse x diretto verso l'alto ed origine O al suolo. Il moto del paracadutista e dell'orologio è rettilineo, rispettivamente uniforme ed uniformemente accelerato. Schematizziamo il paracadutista e l'orologio come punti materiali. Le leggi orarie che ne descrivono il moto sono:

$$\begin{cases} x_p(t) = x_{p0} + v_{p0} \cdot t \\ x_o(t) = x_{o0} + v_{o0} \cdot t + \frac{1}{2} a_o \cdot t^2 \end{cases}$$

All'istante t=0 i due punti hanno le seguenti posizioni e velocità iniziali:

$$\begin{cases} x_{p0} = x_p(0) = h \\ x_{o0} = x_o(0) = h \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{p0} = v_p(0) = -v_0 \\ v_{o0} = v_o(0) = -v_0 \end{cases}$$

In particolare si noti che l'orologio, dal momento che prima della perdita scende solidalmente al paracadutista, ha velocità iniziale pari a quella del paracadutista stesso. L'orologio è sottoposto all'accelerazione di gravità diretta lungo x verso il basso.
Ne consegue che le leggi orarie si possono riscrivere nella forma:

$$\begin{cases} x_p(t) = h - v_0 \cdot t \\ x_o(t) = h - v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Il paracadutista raggiunge il suolo (x=0) ad un istante t_p che può essere calcolato imponendo che la sua coordinata x_p si annulli al tempo t_p nella prima delle due leggi orarie. Si ottiene:

$$t_p = \frac{h}{v_0} = 150s$$

Analogamente l'orologio raggiunge il suolo ad un istante t_o che può essere calcolato imponendo che la sua coordinata x_o si annulli al tempo t_o nella seconda delle due leggi orarie. Risolvendo l'equazione di secondo grado in t, si ottengono due soluzioni, di cui la negativa va scartata, e si ha:

$$t_o = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} = 7.62s$$

L'intervallo di tempo che intercorre tra l'arrivo di paracadutista ed orologio sarà dato quindi dalla differenza tra gli istanti di arrivo calcolati sopra:

$$\Delta t = t_p - t_o = 142.4s$$

Esercizio 3 Un punto materiale si muove di moto armonico semplice, lungo un direzione fissata simmetricamente rispetto all'origine, con ampiezza A=10cm e frequenza ν=10hertz. Se all'istante t=0 si trova nella posizione x_0=-5cm, si determini la velocità all'istante t=10s.

Soluzione

Il moto armonico semplice rettilineo è descritto dalla legge oraria:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

con pulsazione $\omega=2\pi\nu$, ampiezza del moto A e fase iniziale ϕ. ϕ ed A possono essere determinate conoscendo posizione e velocità del punto ad un istante oppure conoscendo la posizione o la velocità in due istanti differenti.
Nel caso del problema l'ampiezza viene data direttamente nel testo:

$$A = 10cm = 0.1m$$

La fase può essere determinata imponendo l'ulteriore condizione, data nel testo, secondo la quale:

$$x(0) = A\sin(\phi) = x_0$$

da cui:

$$\phi = \arcsin\frac{x_0}{A} = -30° = -0.52rad$$

Conoscendo A e ϕ il moto è quindi completamente determinato. L'andamento temporale della velocità si ottiene derivando la posizione rispetto al tempo:

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi) = 2\pi A\nu\cos(2\pi\nu t + \phi)$$

Il valore della velocità all'istante t=10s si ottiene semplicemente sostituendo i valori numerici:

$$v(10s) = 6.28 \cdot 0.1m \cdot 10Hz \cdot \cos(6.28 \cdot 10Hz \cdot 10s - 0.52rad) = 4.20m/s$$

Esercizio 4 Due punti materiali si muovono nello stesso verso su due traiettorie circolari concentriche di raggio R_1=10m e R_2=18m, con la stessa velocità scalare istantanea v=10m/s. All'istante t=0 si trovano sul medesimo diametro con velocità vettoriali parallele e concordi. Calcolare l'intervallo di tempo che deve trascorrere affinché le velocità vettoriali risultino l'una opposta all'altra.

Soluzione

Il moto dei punti è circolare uniforme. Essi si muovono con velocità angolare data da:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

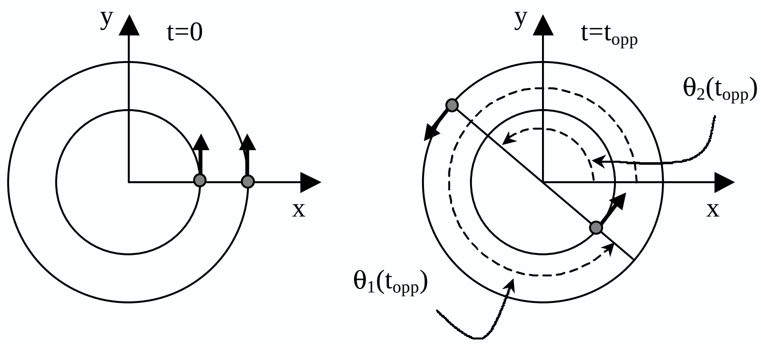
Dal momento che i raggi delle due traiettorie sono differenti le due velocità angolari saranno differenti:

$$\omega_1 = \frac{v}{R_1} = 1rad/s \qquad \text{e} \qquad \omega_2 = \frac{v}{R_2} = 0.56rad/s$$

Possiamo descrivere il moto circolare uniforme dei due punti mediante le leggi orarie angolari:

$$\begin{cases}\theta_1(t) = \theta_{10} + \omega_1 t \\ \theta_2(t) = \theta_{20} + \omega_2 t\end{cases}$$

dove θ_{10} e θ_{20} sono le posizioni angolari dei due punti all'istante t=0. Scegliamo l'origine del sistema di riferimento rispetto al quale misuriamo gli angoli in modo che coincida con la posizione dei due punti all'istante t=0, come mostrato in figura.



Ne consegue che $\theta_{10}=\theta_{20}=0$ e:

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \omega_1 t \\ \theta_2(t) = \omega_2 t \end{cases}$$

L'istante t_{opp} nel quale le due velocità vettoriali divengono opposte può essere calcolato imponendo che, a quell'istante, la posizione angolare dei due punti differisca di π, come mostrato schematicamente in figura, ovvero che:

$$\theta_1(t_{opp}) - \theta_2(t_{opp}) = \omega_1 t_{opp} - \omega_2 t_{opp} = \pi$$

da cui si ricava:

$$t_{opp} = \frac{\pi}{\omega_1 - \omega_2} = 7.12s$$