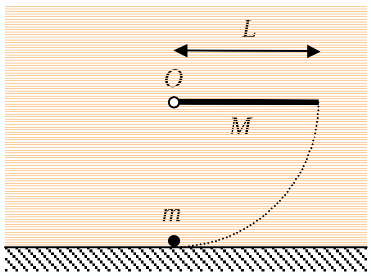
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Sede di Latina

Corso di Laurea di Primo Livello in Ingegneria Elettronica, Telecomunicazioni ed Informatica
Corso di Fisica 1 – 2° Modulo

Prof. F. Michelotti

Esercitazione settimanale numero 2 – Dinamica e statica dei corpi rigidi

Esercizio 1 Una sbarretta sottile rigida di massa *M=1kg*, inizialmente in quiete in posizione orizzontale, è libera di ruotare intorno ad un asse orizzontale passante per un suo estremo. Lasciata libera di muoversi sotto l'azione della forza peso, nell'istante in cui passa per la posizione verticale, essa colpisce con il suo estremo libero un punto materiale di massa *m=0.1kg* inizialmente in quiete. Nell'ipotesi di urto completamente anelastico, calcolare il massimo angolo di oscillazione del sistema massa-sbarretta dopo l'urto. Si trascurino forze e momenti di attrito.



Soluzione

Il problema può essere suddiviso in tre parti: moto di rotazione della sbarretta intorno ad O sotto l'azione della forza peso, urto tra sbarretta e punto materiale, moto di rotazione del sistema solidale sbarretta/punto intorno ad O. Analizziamo separatamente le tre fasi. Scegliamo un sistema di riferimento con asse y verticale, asse x orizzontale ed origine nel punto in cui si trova m all'istante iniziale.
Nella prima fase possiamo applicare la legge di conservazione dell'energia meccanica durante il moto. Avremo:

$$E_{k,in}^{sbarretta} + E_{p,in}^{sbarretta} = E_{k,fin}^{sbarretta} + E_{p,fin}^{sbarretta}$$

dove l'istante t_{in} è quello in cui la sbarretta viene lasciata libera di muoversi da ferma e l'istante t_{fin} è quello in cui la sbarretta si trova in posizione verticale. Dal momento che la forza peso è applicata nel centro di massa della sbarretta, che si trova a metà della sua lunghezza L, l'energia potenziale si esprime come:

$$E_p^{sbarretta} = Mgy$$

avendo posto che l'energia potenziale si annulla quando il centro di massa si trova a quota *y=0*. L'energia cinetica può essere invece espressa in termini di momento d'inerzia e velocità angolare di rotazione; scegliendo come polo per il calcolo dei momenti il punto O, si ha:

$$E_k^{sbarretta} = \frac{1}{2} I_O \omega^2$$

dove I_O è il momento d'inerzia della sbarretta calcolato rispetto ad *O*. La legge di conservazione dell'energia meccanica si traduce quindi nella relazione:

$$MgL = Mg\frac{L}{2} + \frac{1}{2} I_O \omega_{fin}^2$$

dalla quale si ottiene:

$$\omega_{fin} = \sqrt{\frac{MgL}{I_O}}$$

Il momento d'inerzia della sbarretta rispetto ad O si ricava utilizzando il teorema di Huyghens-Steiner:

$$I_O = I_{CM} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

Sostituendo nell'espressione per ω si ha quindi:

$$\omega_{fin} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Nella seconda fase si ha l'urto completamente anelastico tra sbarretta e punto materiale di massa m. Per semplicità di notazione cambiamo simbolo alla velocità angolare della sbarretta nell'istante in cui è verticale ed urta il punto da w_{fin} a w_0. Nell'urto si conserva il momento della quantità di moto rispetto ad O del sistema. Durante l'urto infatti le forze esterne, peso della sbarretta e reazione vincolare, esercitano un momento nullo rispetto ad O, rispettivamente perché una è diretta verso O e l'altra è applicata in O stesso. Si ha quindi:

$$\vec{L}_{fin} = \vec{L}_{in} \qquad \text{ovvero che } L_{z,fin} = L_{z,in}$$

dove L_z è la componente del momento angolare lungo l'asse z perpendicolare al piano del disegno. Esplicitando le espressioni dei momenti in termini di momento d'inerzia e di velocità angolare si ha:

$$I_O^{sbarretta+m}\omega_{fin} = I_O^{sbarretta}\omega_O$$

da cui:

$$\left(I_O^{sbarretta} + mL^2\right)\omega_{fin} = I_O^{sbarretta}\omega_{in}$$

ovvero:

$$\left(\frac{1}{3}ML^2 + mL^2\right)\omega_{fin} = \frac{1}{3}ML^2\omega_{in}$$

da cui ricaviamo la velocità angolare del sistema sbarretta/punto nell'istante immediatamente successivo all'urto:

$$\omega_{fin} = \frac{M}{M+3m}\sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Possiamo analizzare la terza fase, ovvero la risalita del sistema. Di nuovo cambiamo nome alla velocità angolare immediatamente dopo l'urto da ω_{fin} ad ω_0. Nella fase di risalita possiamo applicare ancora una volta la conservazione dell'energia meccanica:

$$E_{k,in}^{sbarretta+massa} + E_{p,in}^{sbarretta} + E_{p,in}^{massa} = E_{k,fin}^{sbarretta+massa} + E_{p,fin}^{sbarretta} + E_{p,fin}^{massa}$$

Indichiamo con θ_{max} l'angolo massimo di cui si inclinerà la sbarretta. Avremo:

$$\frac{1}{2} I_O^{sbarretta+massa} \omega_0^2 + Mg\frac{L}{2} = Mg\left(L - \frac{L}{2}\cos\theta_{\max}\right) + mg\left(L - L\cos\theta_{\max}\right)$$

Sostituendo l'espressione del momento d'inerzia del sistema sbarretta/punto rispetto ad O ed effettuando alcune semplificazioni si ottiene:

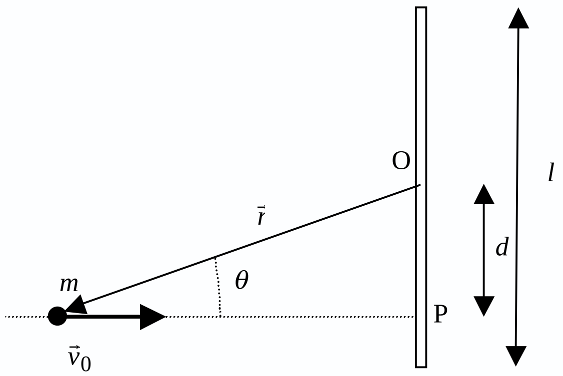
$$\cos\theta_{\max} = 1 - \frac{M^2}{(M+3m)(M+2m)}$$

da cui si ottiene:

$$\theta_{\max} = 69°$$

Esercizio 2 Un'asta di massa *M* e lunghezza *l* giace ferma su un piano orizzontale liscio, priva di vincoli. Una pallina di massa *m*, in moto con velocità $\vec{v}_0$ ortogonale all'asta, la urta elasticamente in un punto a distanza *d* dal centro. Si determini il valore di *m* per il quale la pallina rimane ferma dopo l'urto.

Soluzione



Durante l'urto elastico si ha conservazione della quantità di moto, del momento della quantità di moto e dell'energia cinetica del sistema. Le tre leggi di conservazione si traducono rispettivamente nelle tre relazioni:

$$\begin{cases} m\vec{v}_0 = M\vec{v} \\ \vec{r} \times m\vec{v}_0 = L_z\vec{\omega} \\ \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_O\omega^2 \end{cases}$$

dove si è scelto come polo per il calcolo dei momenti il centro di massa della sbarretta al momento dell'urto. Nelle relazioni si è imposto che la velocità della pallina dopo l'urto è nulla. Si è inoltre tenuto conto che la velocità del centro di massa della sbarretta dopo l'urto è $\vec{v}$, che il momento della quantità di moto della sbarretta dopo l'urto è diretto lungo la perpendicolare al piano d'appoggio (asse z) e che dopo l'urto l'asta possiede sia energia cinetica di traslazione che di rotazione. Le tre relazioni corrispondo alle tre relazioni scalari:

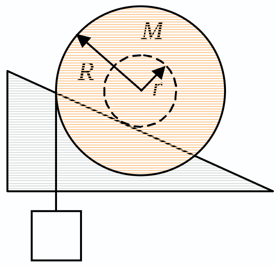
$$\begin{cases} mv_0 = Mv \\ r \cdot mv_0 \cdot \sin\theta = d \cdot mv_0 = \frac{1}{12}Ml^2\omega \\ \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{24}Ml^2\omega^2 \end{cases}$$

risolvendo il sistema di equazioni accoppiate si ricava il valore che deve avere *m*:

$$m = \frac{Ml^2}{l^2 + 12d^2}$$

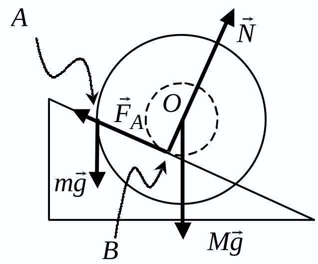
Possiamo verificare che la relazione che abbiamo ottenuto restituisca il risultato che ci saremmo aspettati intuitivamente in un caso particolare. Ad esempio nel caso in cui *d=0* si ottiene il risultato aspettato *m=M*. Infatti se la pallina colpisce l'asta nel suo centro di massa non la mette in rotazione ma solo in traslazione. L'asta si comporta quindi come un punto materiale e si metterà in moto con la stessa velocità con cui la colpisce la pallina, mentre quest'ultima si ferma, esattamente come nel caso dell'urto centrale tra due punti materiali mi massa uguale.

Esercizio 3 Un rocchetto di massa $M=5kg$, formato da due dischi esterni di raggio $R=20cm$ e da un cilindretto interno di raggio $r=5cm$, è poggiato a cavallo di un cuneo inclinato di θ=30°, come mostrato in figura. Il coefficiente di attrito statico tra cuneo e rocchetto sia $\mu_s=0.7$. Su uno dei due dischi esterni è avvolto un filo inestensibile di massa trascurabile, collegato ad una massa m su cui agisce la forza peso. Calcolare il valore di m affinché il sistema, una volta lasciato libero di muoversi da fermo, rimanga in equilibrio statico. Calcolare il valore minimo di μ_s affinché l'equilibrio statico sia possibile.



Soluzione

Affinché il sistema si trovi in equilibrio statico è necessario che la risultante delle forze esterne e dei momenti delle forze esterne siano entrambe nulle. Le forze che agiscono sul sistema sono le forze peso che agiscono sul rocchetto e su m, la reazione normale del piano inclinato, la tensione del filo e la forza di attrito statico tra piano inclinato e rocchetto. Dal momento che vogliamo studiare il sistema in condizioni statiche la tensione del filo eguaglia in modulo la forza peso che agisce su m; possiamo pensare che la forza peso agente su m sia applicata direttamente al rocchetto in A come indicato in figura.
La condizione di equilibrio statico si traduce nelle relazioni:



$$\begin{cases} m\vec{g} + M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_A = 0 \\ \overrightarrow{OA} \times m\vec{g} + \overrightarrow{OB} \times \vec{F}_A = 0 \end{cases}$$

Come al solito possiamo proiettare la relazione relativa alle forze su due assi x ed y rispettivamente paralleli e perpendicolare al piano inclinato. La relazione dei momenti si proietta invece lungo l'asse z diretto come l'asse di rotazione del rocchetto. Si ottiene:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha + Mg\sin\alpha - F_A = 0 \\ -mg\cos\alpha - Mg\cos\alpha + N = 0 \\ Rmg - rF_A = 0 \end{cases}$$

Ricavando F_A dalla terza relazione e sostituendo nella prima si ottiene:

$$m = \frac{Mr\sin\alpha}{R - r\sin\alpha} = 0.71kg$$

Per il valore di m trovato la forza di attrito statico esercitata dal piano, ricavata dalla terza relazione, vale:

$$F_A = \frac{Rmg}{r} = 27.9N$$

Tale valore è inferiore al limite massimo della forza di attrito statico dato da:

$$F_A^{\max} \le \mu_s N = \mu_s (m+M) g\cos\alpha = 34.0N$$

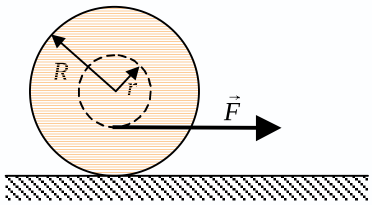
dove N è stata ricavata dalla seconda delle relazioni precedenti. La condizione di equilibrio statico è quindi effettivamente possibile. Se diminuissimo il coefficiente di attrito statico si arriverebbe ad una condizione limite al di sotto della quale la forza di attrito non sarebbe sufficiente a controbilanciare forze e momenti esercitati dalle altre forze. Il valore limite per μ_s si ottiene imponendo che $F_A = F_A^{\max}$. Si ha:

$$F_A = \mu_s^{\min}(n+M)g\cos\alpha$$

da cui:

$$\mu_s^{\min} = \frac{F_A}{(m+M)g\cos\alpha} = 0.58$$

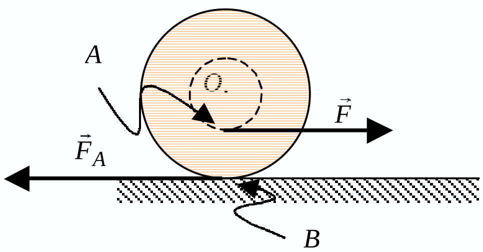
Esercizio 4 Un rocchetto formato da due dischi esterni di massa M e raggio R e da un cilindretto interno di massa $m=M/4$ e raggio $r=R/2$ è tirato mediante un filo inestensibile di massa trascurabile, avvolto sul cilindretto interno, con una forza di modulo F=40N diretta come in figura. Determinare il valore della forza di attrito tra rocchetto e piano nell'ipotesi di moto di puro rotolamento.



Soluzione

Contrariamente a quanto potrebbe suggerire l'intuito, quando la forza tira il filo inestensibile il rocchetto si muove verso destra, trascinato dalla forza stessa. Per convincersi di ciò è sufficiente verificare che se, sotto l'azione della forza, il rocchetto compie un giro completo verso destra il filo si avvolge sul rocchetto di una lunghezza inferiore allo spostamento del rocchetto stesso. Di conseguenza il punto di contatto tra filo e rocchetto si muove comunque verso destra.
Il moto del rocchetto è governato dalle due equazioni cardinali della meccanica de corpi rigidi per le risultanti delle forze e dei momenti delle forze esterne. Con riferimento alla figura, in cui per semplicità non sono indicate la forza peso e la reazione vincolare del piano, avremo:

$$\begin{cases} \vec{F}+\vec{P}+\vec{N}+\vec{F}_A = M\vec{a}_{CM} \\ \overrightarrow{OA}\times\vec{F}+\overrightarrow{OB}\times\vec{F}_A = \dfrac{d\vec{L}}{dt} \end{cases}$$



Come al solito possiamo proiettare la relazione relativa alle forze su due assi x ed y rispettivamente paralleli e perpendicolare al piano di appoggio. La relazione dei momenti si proietta invece lungo l'asse z diretto come l'asse di rotazione del rocchetto. Si ottiene:

$$\begin{cases} F - F_A = Ma_{CM} \\ N = P \\ rF - RF_A = I_z\dfrac{d\omega}{dt} = I_z\alpha \end{cases}$$

dove I_z è il momento d'inerzia del rocchetto rispetto all'asse di simmetria. Nella condizione di puro rotolamento l'accelerazione angolare e quella del centro di massa sono in relazione tra loro:

$$\alpha = \frac{a_{CM}}{R}$$

per cui:

$$\begin{cases} F - F_A = Ma_{CM} \\ N = P \\ rF - RF_A = I_z \dfrac{d\omega}{dt} = I_z \dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases}$$

Utilizzando la prima e la terza relazione e svolgendo i calcoli si ricava:

$$F_A = \frac{I_z - mRr}{I_z - mR^2} F$$

Il momento d'inerzia del rocchetto è la somma dei momenti d'inerzia dei due dischi e del cilindretto:

$$I_z = \frac{1}{2} mr^2 + MR^2 = \frac{33}{8} mR^2$$

in cui si è fatto uso delle condizioni $r=R/2$ e $M=4m$. Sostituendo nell'espressione per il modulo della forza di attrito si ricava:

$$F_A = \frac{29}{26} F = 44.6N$$