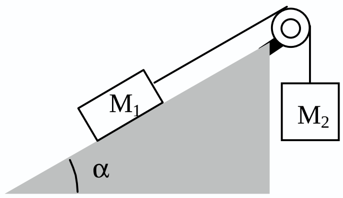
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Sede di Latina

Corso di Laurea di Primo Livello in Ingegneria Elettronica, Telecomunicazioni ed Informatica
Corso di Fisica 1 – 1° Modulo
Canale M-Z
Prof. F. Michelotti

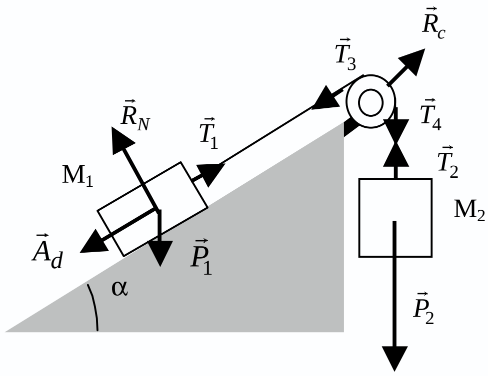
Esercitazione settimanale numero 3 – Dinamica e statica del punto materiale

Esercizio 1 Due masse M_1 ed M_2 sono disposte come in figura; tra M_1 ed il piano c'è un coefficiente di attrito dinamico μ_d. Calcolare l'accelerazione delle due masse e la tensione del filo. Si ha movimento in ogni caso? [Dati: M_1=1/2M_2=10kg, μ_d=0.2, α=30°]



Soluzione

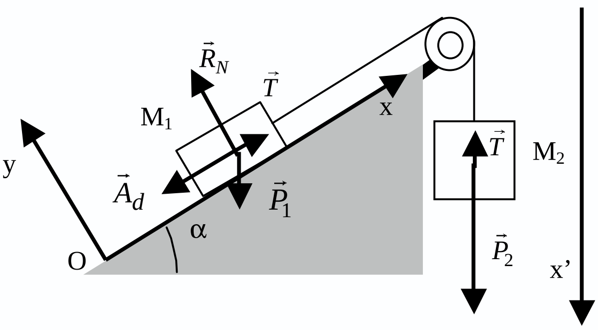
Il sistema di forze che agiscono sui corpi è riportato in figura. La carrucola viene in genere schematizzata come un dispositivo meccanico in grado di modificare la direzione di azione della tensione esercitata dal un vincolo (corda); in tal caso, e non è raro trovare tale condizione nei testi di esercizi di fisica, si omette di



indicare le forze che qui abbiamo chiamato $\vec{T}_3$, $\vec{T}_4$ e $\vec{R}_c$ dal momento che la loro somma vettoriale è sempre nulla. Dal momento poi che la tensione esercitata da un vincolo è la stessa ai due capi (principio di azione e reazione) possiamo semplificare ulteriormente lo schema come indicato nella seconda figura, dove si è scelto anche un sistema di riferimento opportuno.

Per i due corpi possiamo scrivere rispettivamente le seguenti equazioni di Newton:

$$\begin{cases} \vec{F}_1^{TOT} = \vec{P}_1 + \vec{R}_N + \vec{T} + \vec{A}_d = M_1 \vec{a}_1 \\ \vec{F}_2^{TOT} = \vec{P}_2 + \vec{T} = M_2 \vec{a}_2 \end{cases}$$



Proiettando la prima relazione sull'asse x e la seconda sull'asse x' si ottiene:

$$\begin{cases} -P_1 \sin\alpha + T - A_d = M_1 a_1 \\ P_2 - T = M_2 a_2 \end{cases}$$

Proiettando invece la prima relazione lungo l'asse y ed imponendo che lungo tale direzione l'accelerazione sia nulla, si ottiene:

$$-P_1 \cos\alpha + R_N = 0$$

da cui è possibile ricavare il modulo della reazione normale del piano, necessario per calcolare la forza di attrito dinamico. Si avrà:

$$A_d = \mu_d R_N = \mu_d P_1 \cos\alpha$$

Introducendo A_d nel sistema di equazioni ottenuto proiettando lungo *x* ed *x'* si ha:

$$\begin{cases} -P_1 \sin\alpha + T - \mu_d P_1 \cos\alpha = M_1 a_1 \\ P_2 - T = M_2 a_2 \end{cases}$$

Possiamo imporre la condizione $a_1 = a_2$, che traduce il fatto che i due corpi si devono muovere con pari accelerazione e velocità in quanto il vincolo ne fissa la distanza, e ricavare il valore della tensione T della corda. Si ha:

$$T = g \frac{M_1 M_2}{M_2 + M_1}(1 + \sin\alpha + \mu_d \cos\alpha)$$

L'accelerazione può essere ricavata sommando membro a membro le equazioni del sistema precedente, sempre nell'ipotesi che $a_1 = a_2$. Si ha:

$$a_2 = a_1 = \frac{P_2 - P_1 \sin\alpha - \mu_d P_1 \cos\alpha}{M_1 + M_2} = \frac{M_2 g - M_1 g \sin\alpha - \mu_d M_1 g \cos\alpha}{M_1 + M_2} = g \frac{M_2 - M_1(\sin\alpha + \mu_d \cos\alpha)}{M_1 + M_2}$$

Il risultato ottenuto è corretto dal punto di vista dimensionale. Esso conferma poi ciò ci aspettiamo intuitivamente in alcuni casi limite. Nel caso α=0 i due corpi si muoverebbero con accelerazione $a = g \frac{M_2 - M_1 \mu_d}{M_1 + M_2}$; nel caso di attrito nullo (μ_d=0) tale accelerazione varrebbe $a = g \frac{M_2}{M_1 + M_2}$. Se fosse α=90° (corpi appesi alla carrucola), si avrebbe che l'accelerazione varrebbe $a = g \frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2}$, indipendentemente dal fatto che sia presente attrito o meno.

Sostituendo i valori numerici dell'esercizio si ottiene:

$$a_1 = a_2 = \frac{9.81 m/s^2}{10kg + 20kg}\left[20kg - 10kg \cdot (\sin(30°) + 0.2 \cdot \cos(30°)\right] = 4.34 m/s^2$$

=

con verso tale per cui la massa M_2 è accelerata verso il basso.

Si ha poi:

$$T = 9.81 m/s^2 \frac{10kg \cdot 20kg}{20kg + 10kg}(1 + \sin(30°) + 0.2\cos(30°)) = 109.4N$$

Alla domanda se i corpi, partendo da fermi, si mettano in moto o no possiamo rispondere facendo delle considerazioni sull'attrito statico. Dobbiamo verificare se il coefficiente di attrito statico sia sufficiente a trattenere la massa M_1.

In condizioni statiche la massa M_2 è immobile sotto l'azione della forza peso e della tensione del filo; ne consegue che la tensione del filo uguaglia la forza peso in modulo, ovvero che $T = M_2 g$. La proiezione lungo x dell'equazione di Newton per la massa M_1, in condizioni statiche, diviene:

$$-P_1 \sin\alpha + M_2 g - \mu_s P_1 \cos\alpha = 0$$

dove si è introdotto il coefficiente di attrito statico μ_s. Ne consegue che, affinché i corpi rimangano immobili, il coefficiente di attrito statico dovrebbe valere almeno:

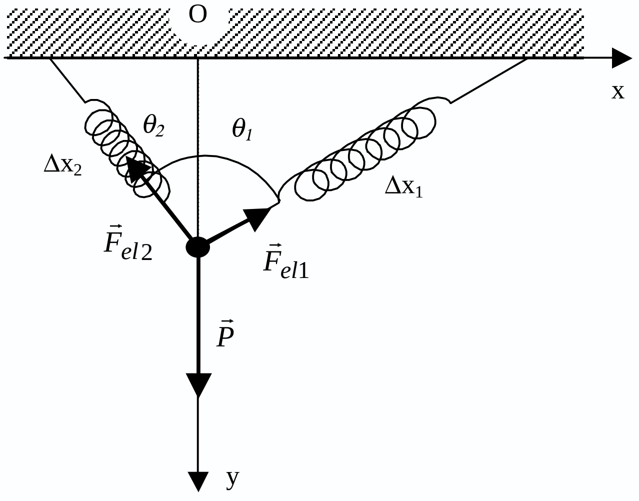
$$\mu_s = \frac{M_2 - M_1 \sin\alpha}{M_1 \cos\alpha} = 1.73$$

Se quindi il coefficiente di attrito statico è maggiore o uguale a 1.73 i corpi rimangono fermi, altrimenti si metteranno in moto con l'accelerazione calcolata sopra. Normalmente, per quasi tutte le coppie di materiali, il coefficiente μ_s è sempre inferiore ad 1.5. Ne consegue che anche nel nostro caso i corpi si metteranno in moto.

Esercizio 2 Un corpo di massa M=100g è appeso al soffitto mediante due molle di costanti elastiche k_1 e k_2 e di lunghezza a riposo nulla (k_1=1N/m, k_2=3N/m). Le due molle sono attaccate a due punti del soffitto distanti 50cm. Calcolare l'elongazione delle molle in condizioni di equilibrio statico.

Soluzione

In condizioni di equilibrio statico il corpo si troverà fermo e le molle saranno allungate, come indicato in figura.



Se il punto materiale si trova in quiete, la risultante delle forze è nulla e si avrà:

$$\vec{P} + \vec{F}_{el1} + \vec{F}_{el2} = 0$$

Proiettando la relazione vettoriale lungo gli assi x ed y del sistema di riferimento mostrato in figura si ottengono le relazioni:

$$\begin{cases} F_{el1} \sin\theta_1 - F_{el2} \sin\theta_2 = 0 \\ P - F_{el1} \cos\theta_1 - F_{el2} \cos\theta_2 = 0 \end{cases}$$

D'altra parte i moduli delle forze elastiche possono essere espressi in termini della loro elongazione. Per ognuna delle due forze si avrà:

$$F_{eli} = k_i \Delta x_i \qquad \text{con} \qquad i=1,2$$

in cui Δx_i è l'allungamento della molla i-esima. Si avrà quindi:

$$\begin{cases} k_1 \Delta x_1 \sin\theta_1 - k_2 \Delta x_2 \sin\theta_2 = 0 \\ mg - k_1 \Delta x_1 \cos\theta_1 - k_2 \Delta x_2 \cos\theta_2 = 0 \end{cases}$$

Le due relazioni ottenute non sono sufficienti a risolvere il problema, dal momento che si hanno quattro grandezze fisiche incognite $\Delta x_1, \Delta x_2, \theta_1, \theta_2$.

Tuttavia possiamo ricavare altre due relazioni da accoppiare alle precedenti considerando che le due molle sono appese al soffitto ad una distanza nota d. Dividendo il triangolo formato dalle molle e dalla congiungente i loro punti di attacco al soffitto in due triangoli rettangoli e studiando le proprietà di questi si ottiene:

$$\begin{cases} \Delta x_1 \sin\theta_1 + \Delta x_2 \sin\theta_2 = d \\ \Delta x_1 \cos\theta_1 = \Delta x_2 \cos\theta_2 \end{cases}$$

Otteniamo quindi il seguente sistema di 4 equazioni in 4 incognite:

$$\begin{cases} k_1 \Delta x_1 \sin\theta_1 = k_2 \Delta x_2 \sin\theta_2 \\ mg - k_1 \Delta x_1 \cos\theta_1 - k_2 \Delta x_2 \cos\theta_2 = 0 \\ \Delta x_1 \sin\theta_1 + \Delta x_2 \sin\theta_2 = d \\ \Delta x_1 \cos\theta_1 = \Delta x_2 \cos\theta_2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema mediante sostituzione si ottiene:

$$tg\theta_1 = \frac{k_2 d}{mg} \qquad \text{e} \qquad tg\theta_2 = \frac{k_1 d}{mg}$$

La distanza h del corpo di massa m dal soffitto può essere ricavata ricordando che:

$$h \cdot tg\theta_1 + h \cdot tg\theta_2 = d$$

da cui, sostituendo le espressioni per le tangenti degli angoli appena ricavate, si ottiene:

$$h = \frac{mg}{k_1 + k_2}$$

Con i dati numerici forniti dal testo del problema si ricava:

$$h = \frac{0.1kg \cdot 9.81m/s^2}{1N/m + 3N/m} = 0.25m$$

Esercizio 3 Un parallelepipedo di massa M=40kg è poggiato su un piano privo di attrito. Sul parallelepipedo è appoggiato un cubetto di massa m=5kg a distanza 40 cm dai bordi del primo. Il sistema è in moto e, ad un certo istante, una forza orizzontale di modulo F=70N inizia ad agire sul parallelepipedo inferiore decelerandolo. Dopo 5 secondi il cubetto cade sul piano. Calcolare il coefficiente di attrito dinamico tra i due corpi.

Soluzione

Durante la decelerazione sui due corpi agiscono le seguenti forze.

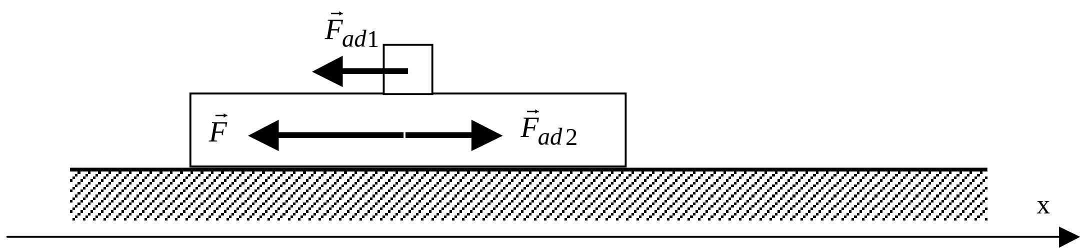
<u>Cubetto</u>

Il cubetto è sottoposto alla forza peso, alla reazione normale del parallelepipedo inferiore che lo sostiene ed alla forza di attrito che il parallelepipedo inferiore esercita su di esso. Questa si manifesta quando i due corpi si muovono l'uno rispetto all'altro, caso possibile visto che sono solo poggiati l'uno sull'altro.

<u>Parallelepipedo inferiore</u>

Il Parallelepipedo inferiore è sottoposto alla forza esterna F causa della decelerazione, alla forza peso, alle reazione normale del piano che lo sostiene ed alla forza di attrito che il cubetto, per il principio di azione e reazione, esercita su di esso.

La situazione è descritta nella figura che segue, nella quale, per semplicità, non sono state indicatele forze peso e le reazioni normali, pur presenti.



Se non vi fosse attrito, il cubetto continuerebbe a muoversi con la velocità che aveva prima dell'applicazione della forza che decelera il sistema e cadrebbe dal parallelepipedo inferiore dopo un certo intervallo di tempo. Dal momento che vi è attrito il parallelepipedo inferiore tende a frenare il cubetto durante il suo moto ed il cubetto, a sua volta, tende a trascinare il parallelepipedo durante la sua frenata.
Possiamo scrivere l'equazione di Newton per ognuno dei due corpi.

<u>Cubetto</u>

$$\vec{F}_{ad1} = m\vec{a}_1$$

Parallelepipedo

$$\vec{F} + \vec{F}_{ad2} = M\vec{a}_2$$

In entrambe le relazioni non abbiamo riportato forze peso e reazioni normali che si fanno equilibrio. Possiamo proiettare le relazioni vettoriali lungo un asse parallelo al piano, scelto come in figura. Avremo:

$$-F_{ad1} = ma_1$$

e

$$-F + F_{ad2} = Ma_2$$

Ricordando che la forza di attrito tra cubetto e parallelepipedo può essere ricavata moltiplicando il coefficiente di attrito dinamico per la reazione normale del parallelepipedo e che tale reazione è uguale ed opposta alla forza peso che si esercita sul cubetto si ha:

$$-\mu_d mg = ma_1$$

e

$$-F + \mu_d mg = Ma_2$$

Possiamo quindi ricavare le accelerazioni cui sono sottoposti i due corpi:

$$\begin{cases} a_1 = -\mu_d g \\ a_2 = \dfrac{-F + \mu_d mg}{M} \end{cases}$$

Il tempo che trascorre prima che il cubetto, supposto puntiforme, cada dal parallelepipedo corrisponde a quello necessario affinché esso si porti sul bordo del parallelepipedo, ovvero affinché la sua posizione sia pari a quella del centro del parallelepipedo più metà della sua lunghezza L. Se supponiamo che al tempo t=0 i due corpi si trovino nell'origine dell'asse x e che abbiano velocità v $_0$, avremo:

$$\begin{cases} x_{cub}(t) = v_0 t + \dfrac{1}{2} a_1 t^2 \\ x_{par}(t) = v0t + \dfrac{1}{2} a_2 t^2 \end{cases}$$

Imponendo che ad un certo istante t* si abbia:

$$x_{cub}(t^*) = x_{par}(t^*) + L/2$$

dove L/2=40cm, possiamo ricavare il tempo t*. Abbiamo:

$$v_0 t^* + \frac{1}{2} a_1 t^{*2} = v0t^* + \frac{1}{2} a_2 t^{*2} + L/2$$

da cui semplificando si ottiene:

$$(a_1 - a_2) t^{*2} = L$$

D’altra parte possiamo sostituire le espressioni delle accelerazioni calcolate precedentemente ed invertire la realzione per calcolare il coefficiente di attrito dinamico che dà luogo ad un t*=5s. Si ottiene:

$$\mu_d = \frac{F - LM / t^{*2}}{(m+M)g}$$

facendo attenzione al fatto che il testo del problema dà come dato L/2 e non L. numericamente si ottiene:

$$\mu_d = 0.16$$

Nel risolvere il problema non ci siamo posti il problema se il cubetto effettivamente inizi a muoversi rispetto al parallelepipedo durante la decelerazione. Tuttavia il testo del problema dava per sicuro il fatto che il cubetto inizi a scivolare sul parallelepipedo, evidentemente perché il coefficiente di attrito statico non è sufficientemente alto da trattenerlo.

Esercizio 4 Un pendolo di lunghezza l=50 cm e massa m=100g compie oscillazioni con ampiezza angolare massima pari a θ=7°. Calcolare la velocità scalare massima durante il moto, la tensione massima esercitata dal filo (inestensibile e di massa nulla) ed il periodo del moto.

Soluzione

Se l’angolo θ rimane sempre inferiore a $\theta_0=7°$ potremo dire che l’approssimazione:

$$\sin\theta \approx \theta$$

è sempre valida e che il moto del pendolo è ben descritto dall’equazione dell’oscillatore armonico. Sappiamo che il moto si svolge seguendo la legge:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

con pulsazione $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. La velocità angolare con cui ruota il pendolo è data da:

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \theta_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

e la velocità scalare con cui muove la massa m sarà:

$$v(t) = l\omega(t) = l\theta_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

La velocità è data quindi da una funzione sinusoidale che oscilla nel tempo con ampiezza $l\theta_0\omega_0$. La velocità massima si ha in tutti gli istanti in cui la fase della funzione seno $\omega_0 t+\phi=\pi/2+k\pi$ e la funzione seno stessa vale uno. In tali istanti l’angolo formato dal pendolo sarà sempre nullo, dal momento che la funzione coseno assume valore nullo. Il pendolo assume quindi massima velocità scalare quando la massa passa per la verticale del pendolo. Avremo:

$$v_{\max} = l\theta_0 \omega_0 = l\theta_0 \sqrt{g/l} = \theta_0 \sqrt{gl}$$

Sostituendo i dati numerici si ha:

$$v_{\max} = 7° \cdot \frac{\pi}{180°} \sqrt{9.81 m/s^2 \cdot 0.5 m} = 0.54 m/s$$

in cui si è convertito θ da gradi in radianti.

Il filo esercita la tensione massima nel momento in cui la massa passa nel minimo della traiettoria, sulla verticale. In queste condizioni la tensione vale:

$$T_{filo} = mg + m\omega_0^2\theta_0^2 l = mg + mg\theta_0^2 = mg(1+\theta_0^2)$$

Numericamente avremo:

$$T_{filo} = 0.1kg \cdot 9.81m/s^2\left[1+(7° \cdot \pi/180°)^2\right] = 1.00N$$

Il periodo può essere calcolato a partire dall'espressione della pulsazione. Si ha:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 6.28\sqrt{\frac{0.5m}{9.81m/s^2}} = 1.41s$$