Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Sede di Latina

Corso di Laurea di Primo Livello in Ingegneria Elettronica, Telecomunicazioni ed Informatica
Corso di Fisica 1 – 2° Modulo

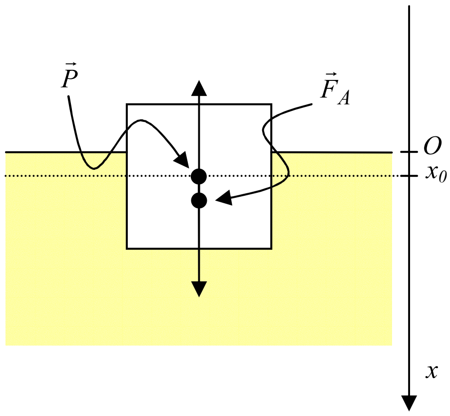
Prof. F. Michelotti

Esercitazione settimanale numero 3 – Statica dei fluidi

Esercizio 1 Un cubo di legno di lato L è parzialmente immerso in un bacino di acqua e si trova in condizioni di equilibrio statico. Si calcoli quanto è alta la porzione di cubo al di sopra della superficie dell'acqua. Ad un certo istante il cubo viene prima spinto in basso di una lunghezza tale da non farlo entrare completamente in acqua e poi lasciato libero di muoversi. Si calcoli il periodo delle oscillazioni verticali del cubo. Si trascurino gli attriti e la formazione di onde di superficie. Siano: $\rho_{LEGNO}=700kg/m^3$, $L=0.1m$.

Soluzione

Trascurando le forze di attrito, il cubo di legno è sottoposto solo alla forza peso ed alla forza di Archimede. In condizioni di equilibrio statico, il cubo sarà immerso in acqua per una parte della sua altezza e la forza peso e quella di Archimede hanno somma vettoriale nulla. Nella figura viene mostrata la posizione del cubo in condizioni di equilibrio. La forza peso è applicata nel centro di massa del cubo di legno (punto superiore nel disegno) mentre la forza di Archimede è applicata nel centro di massa del volume di liquido spostato (punto inferiore).



In condizioni di equilibrio si ha:

$$\vec{P}+\vec{F}_A=0$$

che, proiettando sull'asse x indicato in figura, corrisponde alla relazione:

$$P-F_A=0$$

Ricordando che la forza di Archimede ha intensità pari al peso del volume di liquido spostato dal corpo si ottiene:

$$m_L g-m_{acqua} g=0$$

da cui, esprimendo la massa in termini di densità e volume dei corpi:

$$\rho_{LEGNO}L^3 g-\rho_{acqua}L^2\left(\frac{L}{2}+x_0\right)g=0$$

dove x_0 misura la distanza di cui il centro di massa del cubo si trova sotto la superficie dell'acqua. Ricavando x_0 si ottiene:

$$x_0=L\left(\frac{\rho_{LEGNO}}{\rho_{acqua}}-\frac{1}{2}\right)=0.02m=2cm$$

Se, a partire dalla condizione di equilibrio statico appena trovata, si esercita un'azione esterna in modo da modificare la posizione verticale del centro di massa del cubo la risultante delle due forze non sarà più nulla. In particolare se il cubo è immerso per più di x_0, la forza di Archimede sarà in modulo più intensa di quella peso e la loro somma sarà diretta verso l'alto. Se invece il cubo sarà immerso per meno di x_0, la forza di Archimede sarà in modulo meno intensa di quella peso e la loro somma sarà diretta verso il basso. In ogni caso la risultante delle forze tenderà a riportare il cubo verso la posizione di equilibrio statico, che è quindi di equilibrio stabile. In generale si avrà:

$$\vec{P} + \vec{F}_A = m\vec{a}$$

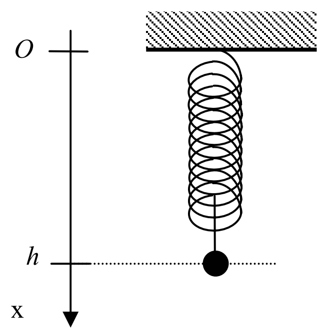
che, proiettando sull'asse x, corrisponde alla relazione:

$$P - F_A = ma$$

Per una generica posizione del centro di massa del cubo si avrà, analogamente a quanto fatto sopra:

$$m_{LEGNO}\, g - \rho_{acqua} L^2 \left(\frac{L}{2} + x \right) g = m_{LEGNO}\, a$$

L'equazione che otteniamo è simile a quella che si otterrebbe se studiassimo il moto di un punto materiale di massa m appeso al soffitto mediante una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. In quel caso, in condizioni di equilibrio statico, sono la forza peso e la forza elastica ad equilibrarsi; la molla sarà allungata di una certa quantità h. Nel caso in cui il punto venga sollevato (abbassato) la forza elastica diminuirà (aumenterà) di intensità; in ogni caso la risultante delle forze riporterà sempre il punto materiale verso la posizione di equilibrio stabile. Si ha quindi:



$$\vec{P} + \vec{F}_{el} = m\vec{a}$$

Proiettando sull'asse x ed esprimendo la forza elastica tramite la costante k:

$$mg - kx = ma$$

che è simile all'equazione che abbiamo ottenuto per il cubo di legno immerso parzialmente in acqua. L'unica differenza è che, nel caso del cubo, invece di una dipendenza da x della forza di Archimede si ha una dipendenza da $\left(\frac{L}{2} + x \right)$. Tale differenza potrebbe facilmente essere eliminata scegliendo il sistema di riferimento Ox con origine non già in corrispondenza della superficie dell'acqua ma ad un'altezza $L/2$ al di sopra di essa; si avrebbe infatti:

$$m_{LEGNO}\, g - \left(\rho_{acqua} L^2 g \right) x = m_{LEGNO}\, a$$

Così facendo la similitudine tra il caso del sistema massa-molla e quello cubo-liquido è completa. Nel caso del cubo il ruolo della costante k viene giocato dalla costante $\rho_{acqua} L^2 g$.

Se quindi si perturba la posizione verticale del cubo esso si metterà ad oscillare in direzione verticale analogamente al caso dell'oscillatore meccanico. Potremo quindi calcolare il periodo di oscillazione usando la stessa, ove al posto di k si usi $\rho_{acqua} L^2 g$. Si ha:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_{LEGNO}}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_{LEGNO}}{\rho_{acqua}L^2 g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_{LEGNO}L^3}{\rho_{acqua}L^2 g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_{LEGNO}L}{\rho_{acqua}g}} = 0.53s$$

Si noti che l'analogia con il caso dell'oscillatore meccanico si ha perché la forza di Archimede è linearmente proporzionale alla posizione del cubo in acqua. Tale proporzionalità non è tuttavia sempre verificata. Se si immagina infatti di agire sul cubo in modo da spingerlo sempre più a fondo a partire dalla posizione di equilibrio statico la forza di Archimede aumenterà proporzionalmente allo spostamento; dal momento però in cui il cubo entrerà completamente in acqua la forza di Archimede rimarrà costante, e pari in intensità al peso della massa d'acqua contenuta nel volume del cubo. Il moto del cubo sarà armonico semplice nel limite in cui il cubo non esca né entri mai completamente dall' acqua o in acqua.